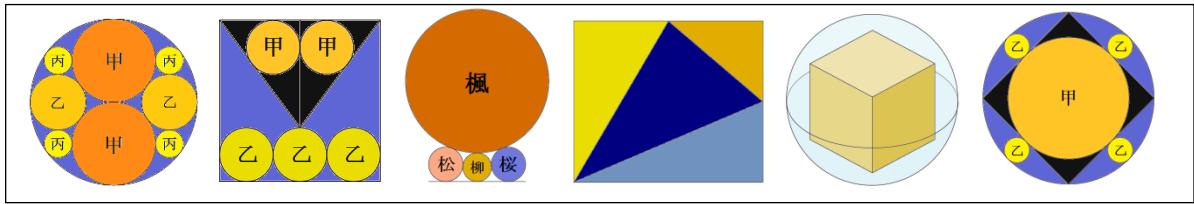


龍穩院新算額 (解説)



<基本定理>

(1) 鉤股弦の定理と三角定規

$(\text{鉤})^2 + (\text{股})^2 = (\text{弦})^2$

$\sqrt{2} = 1.41421356\dots$
ひとよひとよにひとみごろ

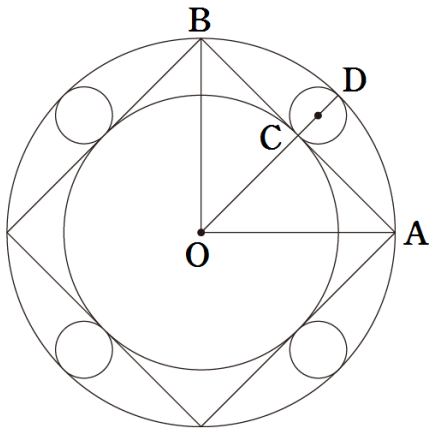
$\sqrt{3} = 1.7320508\dots$
ひとなみにおごれや

(2) 直角三角形の内接円

$$\begin{cases} \text{鉤} = r + x \\ \text{股} = r + y \\ \text{弦} = x + y \end{cases}$$

これより、内接円の直径は $2r = (\text{鉤} + \text{股}) - \text{弦}$

第1問



$$\begin{cases} OA : OB : AB = 1 : 1 : \sqrt{2} \text{ (}\triangle OAB \text{ は直角二等辺三角形)} \\ OA = OB = 4 \text{ (外円の半径)} \end{cases}$$

これより $AB = 4\sqrt{2}$ であり、

$$AC = \frac{1}{2}AB = 2\sqrt{2}$$

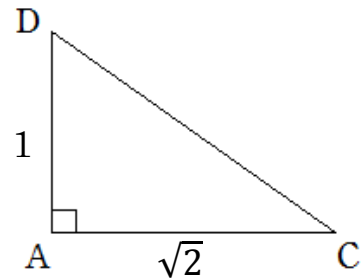
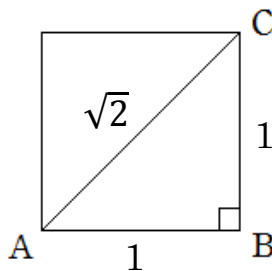
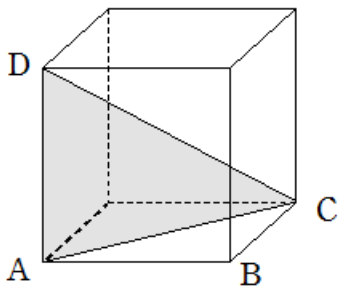
$\triangle OAB \sim \triangle CAO$ (相似形) であるから、 $OC = AC = 2\sqrt{2}$ となつて、甲円の半径 = $2\sqrt{2}$ (寸)

(これらをひくくると、 $OC = OA \div \sqrt{2} = 4 \div \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ も可)

また、 $CD = OD - OC = 4 - 2\sqrt{2} = 2(2 - \sqrt{2})$ から

乙円の半径 = $2 - \sqrt{2}$ (寸)

第2問



立方体の辺の長さを仮に 1 とすると、 $CD^2 = 1^2 + (\sqrt{2})^2 = 3$ より $CD = \sqrt{3}$

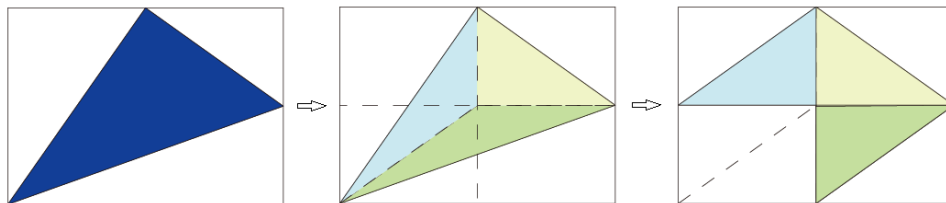
よつて、 $AB : CD = 1 : \sqrt{3}$ すなわち $CD = \sqrt{3}AB$

CD は外接球面の直径に等しいから、 $CD = 3 \times 2 = 6$

これより、 $\sqrt{3}AB = 6$ となつて、立方体の辺の長さは、

$$AB = \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3} \text{ (寸)}$$

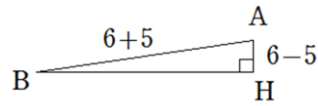
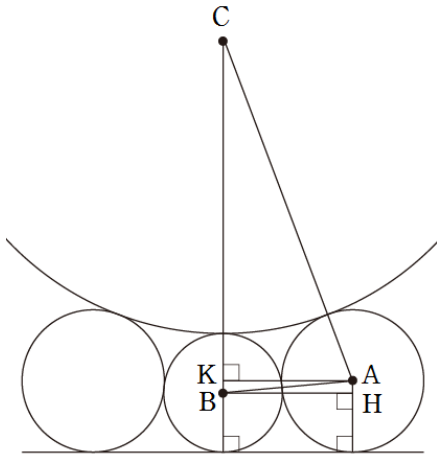
第3問



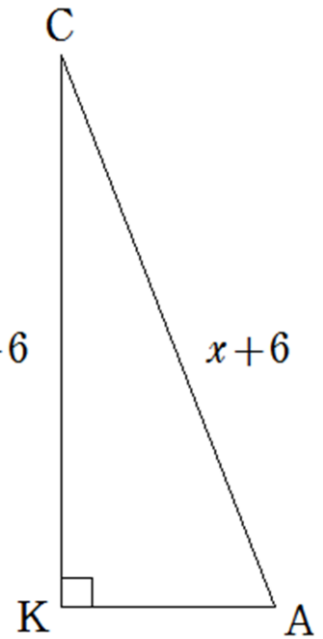
求める三角形の面積は、長方形の面積の $\frac{3}{8}$ であるから、

$$16 \times \frac{3}{8} = 6 \text{ (歩)}$$

第4問



$$BH^2 = 11^2 - 1^2 = 120$$



$$KA^2 = (x+6)^2 - (x+4)^2$$

$$= (x^2 + 12x + 36) - (x^2 + 8x + 16) = 4x + 20$$

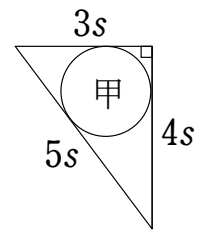
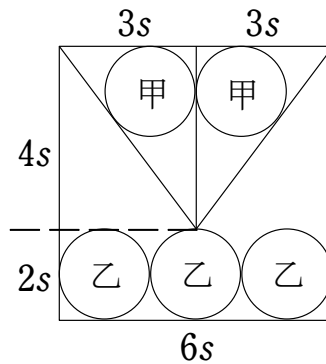
ここで、 $KA = BH$ より $KA^2 = BH^2$

よって、 $4x + 20 = 120$ を解いて、楓円の半径は $x = 25$ (寸)。

第5問

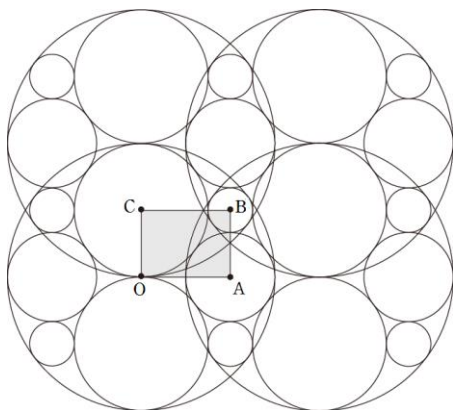
甲、乙円の半径をそれぞれ r, s とすると、右の図において基本定理を用いることにより、 $r = s$ が成り立つことが分かる。

よって、甲円と乙円の半径は等しく、(乙円の半径) = 1 (寸)

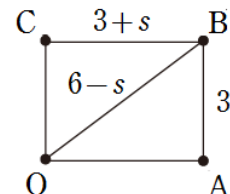
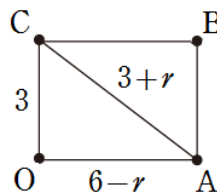


甲円の直径 $2r$ は、 $2r = (3s + 4s) - 5s = 2s$ であるから、 $r = s$

第6問

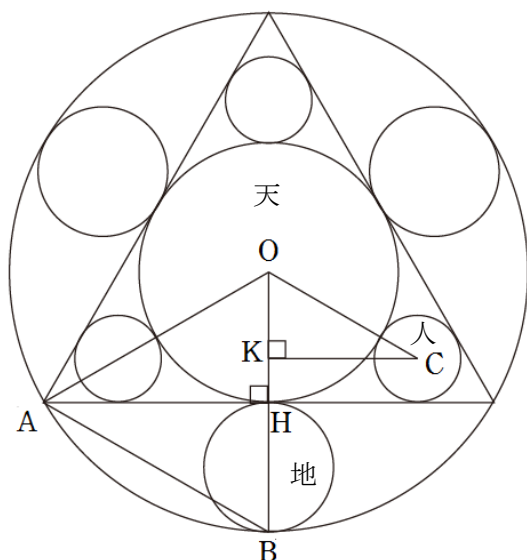


左図の敷き詰め文様により、各円の中心を結ぶ四角形 $OABC$ は長方形と分かる。したがって、 $\triangle OAC$ は直角三角形。



甲円の半径は外円の半径の半分で3。また、乙、丙円の半径をそれぞれ r, s とすると、鉤股弦の定理により $r = 2$ となり、これより $s = 1$ 。
すなわち、各半径は甲3寸、乙2寸、丙1寸。

小中学生向けチャレンジ問題その 1 (解説)



$\triangle OAB$ は正三角形だから、

$$OA=OB=AB=12 \text{ (外円の半径)}$$

$$OH=HB=6$$

これより、天円の半径 6 寸、地円の半径 3 寸。

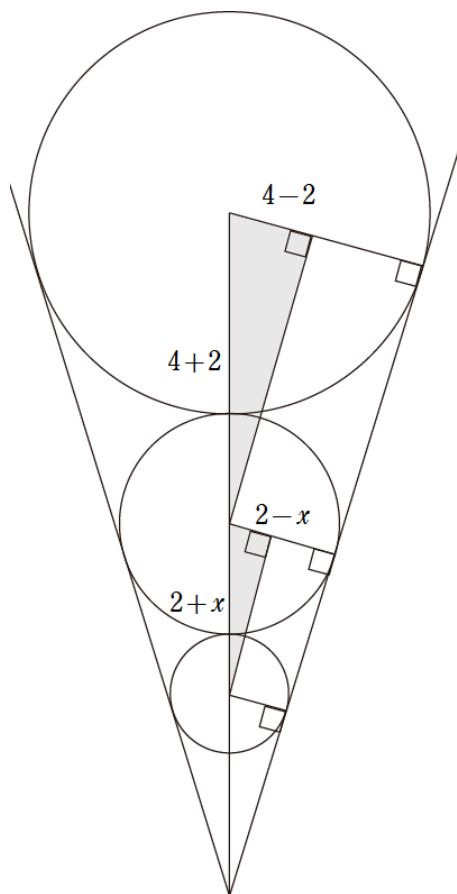
また、人円の半径を x とすると、

$$OC=6+x, \quad OK=6-x$$

$\triangle OKC$ が正三角形の半分 (三角定規) であることから、 $OC=2OK$ すなわち

$$6+x=2(6-x)$$

これを解いて、 $x=2$ だから、人円の半径 2 寸。



小円の半径を x とすると、

左図の灰色に塗った直角三角形の相似により、

$$(2+x):(4+2)=(2-x):(4-2)$$

が成り立つから、

$$(2+x):6=(2-x):2$$

$$2(2+x)=6(2-x)$$

$$4+2x=12-6x$$

$$8x=8$$

$$x=1$$

となって、人円の半径は 1 寸。

一般に、天地人の各円の半径を a, b, c とすると、

$$b^2=ac$$

という関係が成り立つ。

※ 疑問点やお気付きの点がございましたら、第 2 回 (8/11) にご参加の上、ご指摘ください。